

Matematica generale: compito dell'11 giugno 2013

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chieda al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Denotando con $I(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$, si considerino i 3 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ e } x \neq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : -\ln(x^2) \in \mathbb{R}\}, \quad C = I(0, 1).$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se $A \subseteq B$ e se $C \subseteq A$.
(b) Determinare $A \cup C$ e $B \cup C$.
(c) Determinare $A \cap B$ e $B \cap C$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{1-x^2}{x-3} \leq \frac{3}{3-x}.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & \text{se } x < 0, \\ -e^x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

determinarne

- (a) il dominio;
(b) il segno;
(c) gli eventuali asintoti;
(d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
(e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
(f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
(g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione $f(x) = (x-2)(1-x)$, in corrispondenza dell'intervallo $(0, 2)$.
5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{2^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n^2}$$

convergono.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 2 & 4 & -18 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) dire, motivando la risposta, se A è invertibile;
(b) calcolare $A \cdot B$;
(c) calcolare il rango di A e il rango di B .